МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ФГОУ ВПО СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

для студентов заочного обучения
факультетов механизации с.х. и электроэнергетического

Ставрополь
2020

ББК 2.151.3
Б 86

Составители методических указаний:
кандидат технических наук, доцент А. В. Бобрышов
старший преподаватель Ю.В. Прохорская

Рекомендовано к изданию методическим советом **СтГАУ**
(протокол от 2020 г.).

Бобрышов А.В. , Прохорская Ю.В.

Б 86 Методические указания и контрольные задания по теоретической механике. — Ставрополь: Изд-во СтГАУ «АГРУС», 2020. - с.

ББК 22.1513

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют контрольную работу.
Задание 1 (статика)—задачи С1, С5.
Задание 2 (кинематика)—задачи К1, К4.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С 1.4 это рис. 4 к задаче С1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице—по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия **и** инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). **Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;** на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости **и** ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин **нужно обязательно.** Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и **подробно излагать весь ход расчетов.** На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1 и С5 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам—вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой «Указания»; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера—разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но **при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями;** в конце должны быть даны ответы.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 1,2. М., 1970, 1971 и последующие издания.

Воронков И. М. Курс теоретической механики. М., 1954 и последующие издания.

Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. Курс теоретической механики. М., 1966 и последующие издания.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. 3-е изд. М., **1963** и последующие издания.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. 1. М.,1962 и последующие издания.

Яблонский А. А. Курс теоретической механики. **Ч. 2. М., 1962 и** последующие издания.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1952 и последующие издания,

Дополнительная

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство **к** решению задач по **теоретической механике. М., 1965 и** последующие издания.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. М., 1961 и последующие издания.

Бражниченко Н. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л., Морозов В. И., Ушакова Г. Н. Сборник задач по теоретической механике **М., 1967.**

Гернет М. М. Курс теоретической механики. М, 1970 и последующие издания.

Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А. А. Яблонского. М., 1972 **и** последующие издания, (Содержит примеры решения задач.)

ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

СТАТИКА

Задача С1

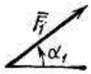
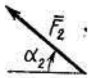
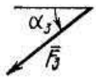
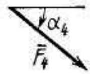
Жесткая рама (рис. С1. 0—С1.9, табл. С1) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P=25$ кН. На раму действует пара сил с моментом $M=60$ кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила F_2 под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила $\overline{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E и т. д.).

Определить реакции связей в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a=0{,}5$ м.

Указания. Задача С1 —на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_O(\overline{F})=m_O(\overline{F}')+$ $+m_O(\overline{F}'')$.

Таблица С1

Силы								
	$F_1=10$ кН		$F_2=20$ кН		$F_3=30$ кН		$F_4=40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	H	30	—	—	—	—	K	60
1	—	—	D	15	E	60	—	—
2	K	75	—	—	—	—	E	30
3	—	—	K	60	H	30	—	—
4	D	30	—	—	—	—	E	60
5	—	—	H	30	—	—	D	75
6	E	60	—	—	K	15	—	—
7	—	—	D	60	—	—	H	15
8	H	60	—	—	D	30	—	—
9	—	—	E	75	K	30	—	—

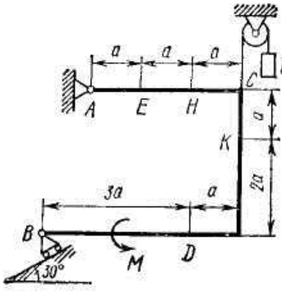


Рис. С1.0

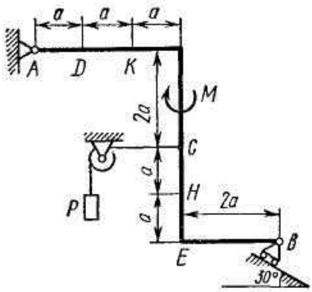


Рис. С1.1

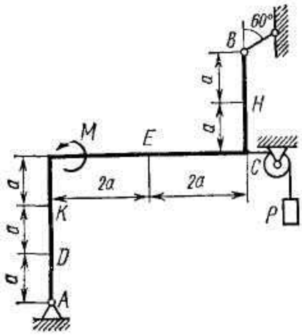


Рис. С1.2

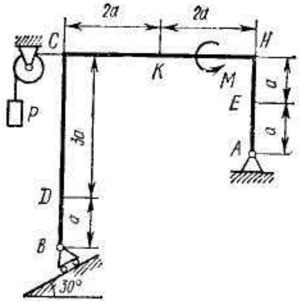


Рис. С1.3

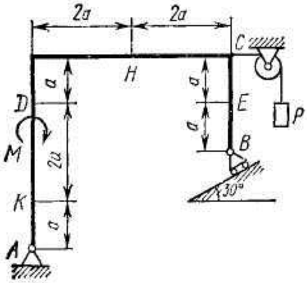


Рис. С1.4

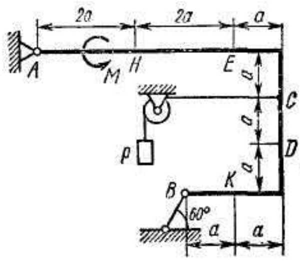


Рис. С1.5

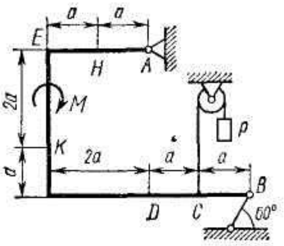


Рис. C1.6

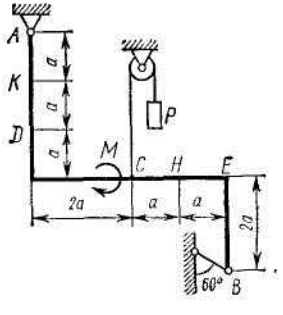


Рис. C1.7

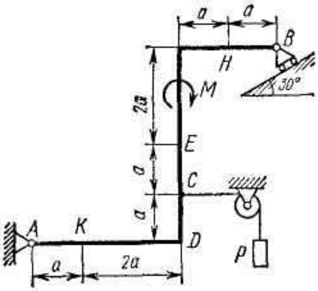


Рис. C1.8

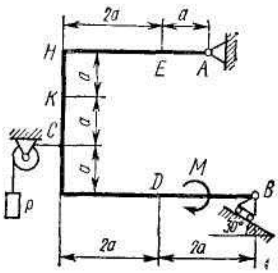


Рис. C1.9

Пример C1. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. C1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B—подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F=25$ кН, $\alpha=60°$, $P=18$ кН, $\gamma=75°$, $M=50$ кН·м, $\beta=30°$, $a=0{,}5$ м. Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $T=P$) и реакции свя-

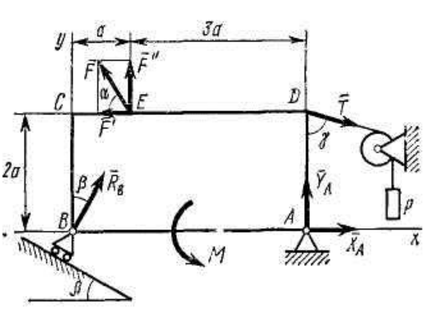


Рис. C1

зей $\overline{X}_A$, $\overline{У}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ ($F'=F\cos\alpha$, $F''=F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F})=m_A(\overline{F'})+m_A(\overline{F''})$. Получим:

$$\Sigma F_{kx}=0,\quad X_A+R_B\sin\beta-F\cos\alpha+T\sin\gamma=0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky}=0,\quad Y_A+R_B\cos\beta+F\sin\alpha-T\cos\gamma=0; \qquad (2)$$

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k)=0,\quad M-R_B\cos\beta\cdot 4a+F\cos\alpha\cdot 2a-F\sin\alpha\cdot 3a-$$
$$-T\sin\gamma\cdot 2a=0. \qquad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции. Ответ: $X_A=-8{,}5$ кН; $У_A=-23{,}3$ кН; $R_B=7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{У}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

Задача С5

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. С5.0—С5.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С5.8, С5.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

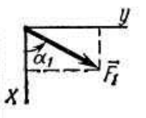
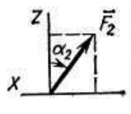
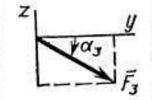
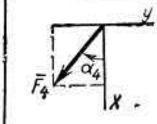
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1=5$ кН, вес меньшей плиты $P_2=3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xy горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом $M=4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С5; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\overline{F}_2$ — в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F}_3$ в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a=0{,}6$ м.

Указания. Задача С5 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\overline{F})=m_x(\overline{F}')+m_x(\overline{F}'')$ и т. д.

Таблица С5

Силы								
	$F_1=6$ кН		$F_2=8$ кН		$F_3=10$ кН		$F_4=12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	E	60	H	30	—	—	—	—
1	—	—	D	60	E	30	—	—
2	—	—	—	—	K	60	E	30
3	K	30	—	—	D	0	—	—
4	—	—	E	30	—	—	D	60
5	H	0	K	60	—	—	—	—
6	—	—	H	90	D	30	—	—
7	—	—	—	—	H	60	K	90
8	D	30	—	—	K	0	—	—
9	—	—	D	90	—	—	H	30

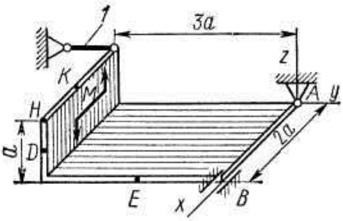


Рис С5 0

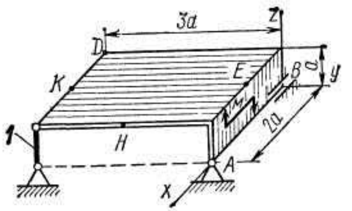


Рис С5 1

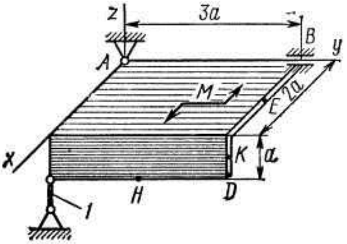


Рис С5 2

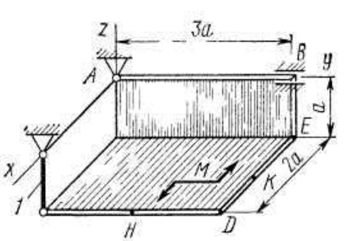


Рис С5 3

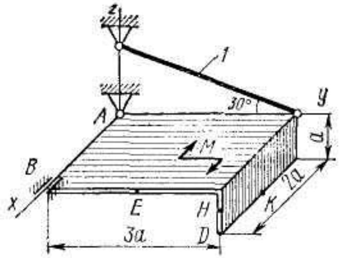


Рис. C5.4

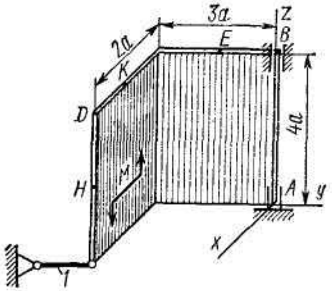


Рис. C5.5

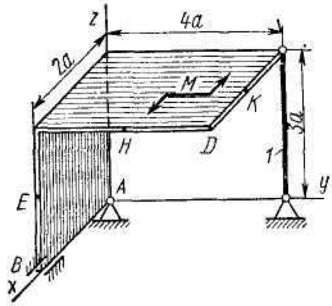


Рис. C5.6

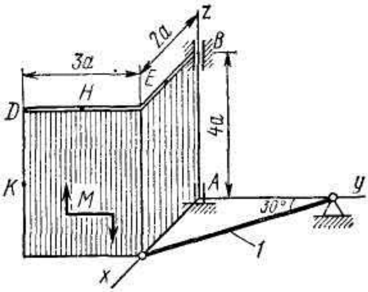


Рис. C5.7

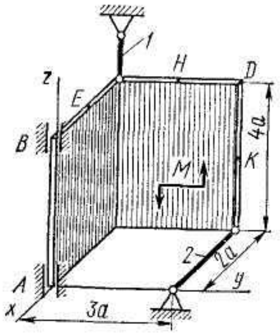


Рис. C5.8

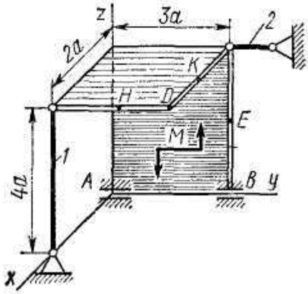


Рис. C5.9

Пример С5. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С5) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\overline{F}$, а в плоскости, параллельной yz, — пара сил с моментом M.

Дано: $P=3$ кН, $F=8$ кН, $M=4$ кН·м, $\alpha=60°$, $AC=0{,}8$ м, $AB=1{,}2$ м, $BE=0{,}4$ м, $EH=0{,}4$ м. Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

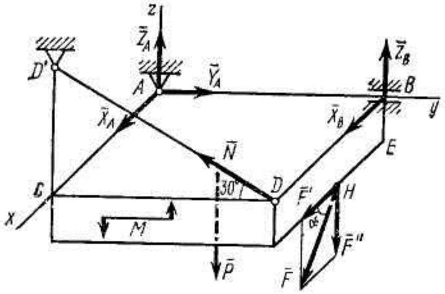


Рис. С5

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}$, $\overline{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) — на две составляющие $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\Sigma F_{kx}=0, \quad X_A+X_B+F\cos 60°=0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{ky}=0, \quad Y_A-N\cos 30°=0; \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{kz}=0, \quad Z_A+Z_B-P+N\sin 30°-F\sin 60°=0; \qquad (3)$$

$$\Sigma m_x(\overline{F}_k)=0, \quad M-P\cdot\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB-F\sin 60°\cdot AB+$$
$$+N\sin 30°\cdot AB=0; \qquad (4)$$

$$\Sigma m_y(\overline{F}_k)=0, \quad P\cdot\frac{AC}{2}-N\sin 30°\cdot AC+$$
$$+F\sin 60°\cdot\frac{AC}{2}-F\cos 60°\cdot BE=0; \qquad (5)$$

$$\Sigma m_z(\overline{F}_k)=0, \quad -F\cos 60°\cdot AB-N\cos 30°\cdot AC-X_B\cdot AB=0. \qquad (6)$$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные осям x и z ($F'=F\cos\alpha$, $F''=F\sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. Указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции. Ответ: $X_A=3{,}4$ кН; $Y_A=5{,}1$ кН; $Z_A=4{,}8$ кН; $X_B=-7{,}4$ кН; $Z_B=2{,}1$ кН; $N=5{,}9$ кН. Знак минус указывает, что реакция $\bar{X}_B$ направлена противоположно показанной на рис. С5.

КИНЕМАТИКА

Задача К1

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0—К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1=1$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x=f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y=f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0—2 в столбце 2, для рис. 3—6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах С1—С5, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 — по последней.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1=1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Таблица К1

Номер условия	$y=f_2(t)$		
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9
1	2	3	4
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	рис. 0—2	рис. 3—6	рис. 7—9
1	2	3	4
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

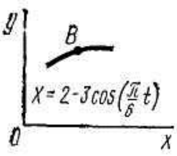


Рис. К1.0

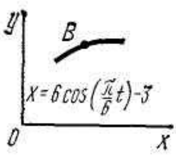


Рис. К1.1

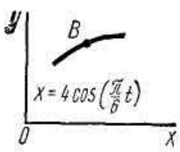


Рис. К1.2

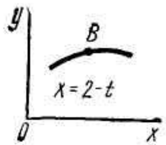


Рис. К1.3

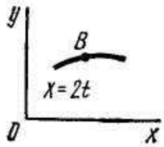


Рис. К1.4

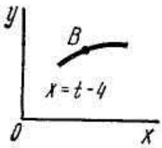


Рис. К1.5

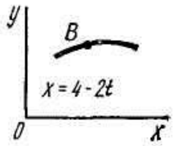


Рис. К1.6

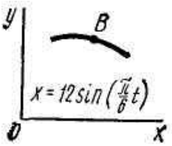


Рис. К1.7

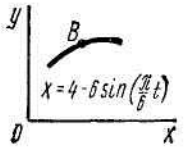


Рис. К1.8

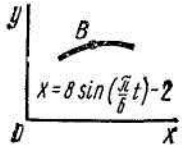


Рис. К1.9

Пример К1. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3; \qquad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3 - x}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y + 1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3 - x}{2} = 1 - 2\,\frac{(y + 1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1):

$$x = (y + 1)^2 + 1. \qquad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t=1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с}, \quad v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с},$$

$$v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \qquad (3)$$

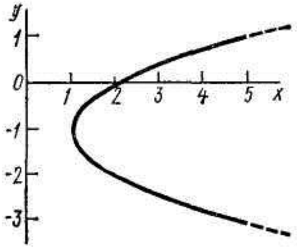


Рис. К1

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t=1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2, \quad a_{1y} = -0{,}12 \text{ см/с}^2,$$

$$a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \qquad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим:

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt}$$

$$\text{и } a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t=1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t=1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t=1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см. Ответ: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0—К4.4) или круглая пластина радиуса $R=60$ см (рис. К4.5—К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0—4) или по окружности радиуса R (рис. 5—9) движется точка M; закон ее относительного движения, т. е. зависимость $s=AM=f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0—4 и для рис. 5—9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s=AM>0$ (при $s<0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1=1$ с.

Указания. Задача К4— на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1=$ 1с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5—9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1=1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi=f_1(t)$	Для рис. 0—4		Для рис. 5—9	
		b, см	$s=AM=f_2(t)$	l	$s=\overset{\frown}{AM}=f_2(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2-1)$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t-t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(5t^3-t)-30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2-t)$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t-2t^2)$

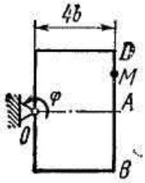


Рис. К4.0

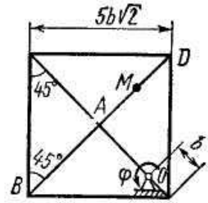


Рис. К4.1

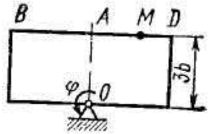


Рис. К4.2

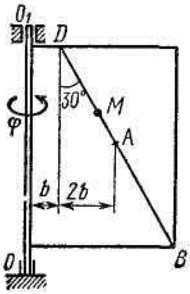


Рис. К4.3

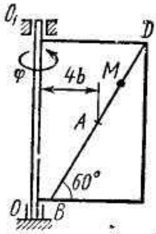


Рис. К4.4

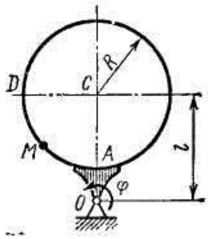


Рис. К4.5

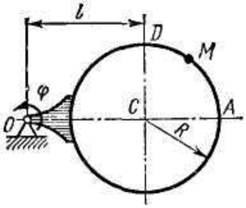


Рис. К4.6

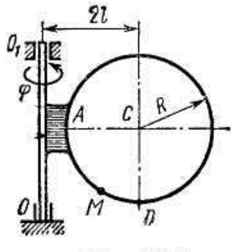


Рис. К4.7

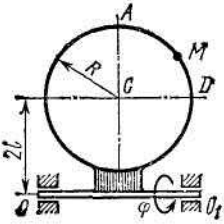


Рис. К4.8

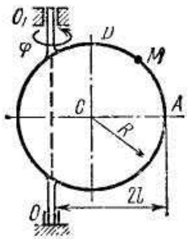


Рис. К4.9

Пример К4. Шар радиуса R (рис. К4, a) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi=f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4, a дуговой стрелкой). По дуге

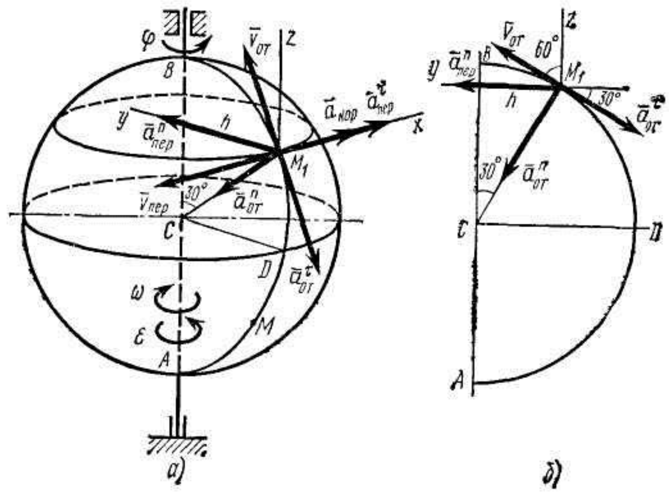


Рис. К4

большого круга («меридиану») $\overset{\frown}{ADB}$ движется точка M по закону $s=\overset{\frown}{AM}=f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D.

Дано: $R=0{,}5$ м, $\varphi=2t^3-4t^2$, $s=(\pi R/6)\,(7t-2t^2)$ (φ — в радианах, s — в метрах, t — в секундах). Определить: $v_{аб}$ и $a_{аб}$ в момент времени $t_1=1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге $\overset{\frown}{ADB}$ относительным ($\overset{\frown}{AB}$ — относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{аб}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{аб}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{аб}=\bar{v}_{от}+\bar{v}_{пер},\quad \bar{a}_{аб}=\bar{a}_{от}+\bar{a}_{пер}+\bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{от}=\bar{a}^{\tau}_{от}+\bar{a}^{n}_{от}$, $\bar{a}_{пер}=\bar{a}^{\tau}_{пер}+\bar{a}^{n}_{пер}$.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s=\overset{\smile}{AM}=(\pi R/6)\,(7t-2t^2). \tag{2}$$

Сначала устаНовим, где будет находиться точка M на дуге $\overset{\frown}{ADB}$ в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t=1$ с, получим

$$s_1 = \frac{5}{6}\pi R. \quad \text{Тогда} \angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ$$

или $\angle BCM = 30^\circ$. Изображаем на рис. К4, *а* точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1).

Теперь находим числовые значения $v_{\text{от}}$, $a^\tau_{\text{от}}$, $a^n_{\text{от}}$:

$$v_{\text{от}} = \dot{s} = (\pi R/6)(7 - 4t); \quad a^\tau_{\text{от}} = \dot{v}_{\text{от}} = -\frac{2}{3}\pi R;$$

$$a^n_{\text{от}} = v^2_{\text{от}}/\rho_{\text{от}} = v^2_{\text{от}}/R,$$

где $\rho_{\text{от}}$ — радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги $\overset{\frown}{ADB}$. Для момента времени $t_1 = 1$с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим

$$v_{\text{от}} = \frac{\pi R}{6}3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}; \quad a^\tau_{\text{от}} = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2; \tag{3}$$

$$a^n_{\text{от}} = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\overline{v}_{\text{от}}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $a^\tau_{\text{от}}$ —в противоположную сторону; вектор $a^n_{\text{от}}$ направлен к центру C дуги $\overset{\frown}{ADB}$. Изображаем все эти векторы на рис. К4, *а*. Для наглядности приведен рис. К4, *б*, где дуга $\overset{\frown}{ADB}$ совмещена с плоскостью чертежа.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8$ и при $t_1 = 1$ с

$$\omega = -2\text{с}^{-1}; \quad \varepsilon = 4\text{с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что при $t_1 = 1$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. К4, *а* соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения $\overline{v}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}_{\text{пер}}$ находим сначала расстояние h точки M_1 от оси вращения. Получаем $h = R\sin 30^\circ = 0{,}25$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (4), получим:

$$v_{\text{пер}} = |\omega| h = 0{,}5 \text{ м/с}, \quad a^\tau_{\text{пер}} = \varepsilon h = 1 \text{ м/с}^2, \tag{5}$$

$$a^n_{\text{пер}} = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2.$$

Изображаем на рис. К4, *а* векторы $\overline{v}_{\text{пер}}$ и $\overline{a}^\tau_{\text{пер}}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\overline{a}^n_{\text{пер}}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{от}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 60°, то численно в момент времени $t_1=1$ с [см. равенства (3) и (4)]

$$a_{кор}=2|v_{от}|\cdot|\omega|\sin 60^\circ=2\frac{\pi}{4}2\frac{\sqrt{3}}{2}=2{,}72\ м/с^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем, спроектировав вектор $\bar{v}_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\bar{a}^{\tau}_{пер}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $\bar{a}_{кор}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{кор}=2(\bar{\omega}\times\bar{v}_{от})$. Изображаем вектор $\bar{a}_{кор}$ на рис. К4, *а*.

Теперь можно вычислить значения $v_{аб}$ и $a_{аб}$.

4. Определение $v_{аб}$. Так как $\bar{v}_{аб}=\bar{v}_{от}+\bar{v}_{пер}$, а векторы $\bar{v}_{от}$ и $\bar{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, *а*), то в момент времени $t_1=1$ с

$$v_{аб}=\sqrt{v^2_{от}+v^2_{пер}}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+(0{,}5)^2}=0{,}93\ м/с.$$

5. Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{аб}=\bar{a}^{\tau}_{от}+\bar{a}^{n}_{от}+\bar{a}^{\tau}_{пер}+\bar{a}^{n}_{пер}+\bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси M_1xyz (см. рис. К4, *а*) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ и $\bar{a}_{кор}$ лежат на проведенной оси x, а векторы $\bar{a}^{\tau}_{от}$, $\bar{a}^{n}_{от}$ и $\bar{a}^{n}_{пер}$ расположены в плоскости дуги $\overset{\frown}{ADB}$, т. е. в плоскости M_1yz (см. рис. К4, *б*). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1=1$ с:

$$a_{абx}=a^{\tau}_{пер}+a_{кор}=1+2{,}72=3{,}72\ м/с^2;$$

$$a_{абy}=a^{n}_{пер}+a^{n}_{от}\cos 60^\circ-|a^{\tau}_{от}|\cos 30^\circ=1+\frac{\pi^2}{16}-$$

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}=0{,}71\ м/с^2;$$

$$a_{абz}=-|a^{\tau}_{от}|\cos 60^\circ-a^{n}_{от}\cos 30^\circ=-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right)=-1{,}59\ м/с^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени $t_1=1$ с:

$$a_{аб}=\sqrt{a^2_{абx}+a^2_{абy}+a^2_{абz}}=4{,}1\ м/с^2.$$

Ответ: $v_{аб}=0{,}93$ м/с; $a_{аб}=4{,}1$ м/с^2.

ЗАДАНИЕ 6. Общие теоремы динамики механической системы

Механическая система состоит из катков (или катка и подвижного блока) 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 =0,3 м, r_3 =0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3=0,2 м, блока 4 радиуса R_4= 0,2 м и грузов 5 и 6
(рис. 6.0 … 6.9, табл. 9); тела 1 и 2 считать сплошными однородными цилиндрами, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f=0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и один из катков); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F=f(s)$, зависящей от перемещения s точки ёе приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, Когда перемещение s станет равным s_1 = 0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 5 или 6, если m_5 =0 или m_6 =0, а также каток 1 на рис. 6.0…6.4 , если m_1 =0, и каток 2 на рис. 6.5…6.9, если m_2 =0; все остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

ТАБЛИЦА 9

Номер условия	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	**c,** *Н/м*	**M,** *Н· м*	**F=f(s),** *Н*	**Найти**
	кг									
0	*2*	*0*	*4*	*0*	*6*	*0*	*180*	*1,2*	*80(3+4s)*	
1	*0*	*2*	*0*	*6*	*0*	*4*	*120*	*0,6*	*20(6+5s)*	
2	*6*	*0*	*0*	*2*	*4*	*0*	*400*	*1,8*	*60(4+s)*	
3	*0*	*4*	*6*	*0*	*0*	*2*	*240*	*0,3*	*40(3+8s)*	
4	*4*	*0*	*0*	*2*	*0*	*6*	*320*	*1,5*	*50(5+2s)*	
5	*2*	*0*	*4*	*0*	*0*	*6*	*100*	*0,9*	*30(4+3s)*	
6	*0*	*4*	*0*	*6*	*2*	*0*	*160*	*2,4*	*60(2+5s)*	
7	*6*	*0*	*0*	*4*	*0*	*2*	*120*	*0,3*	*80(1+4s)*	
8	*0*	*6*	*2*	*0*	*4*	*0*	*200*	*1,2*	*20(8+3s)*	
9	*0*	*2*	*0*	*4*	*6*	*0*	*100*	*0,6*	*40(3+2s)*	

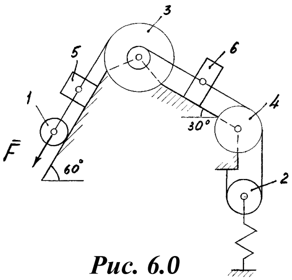


Рис. 6.0

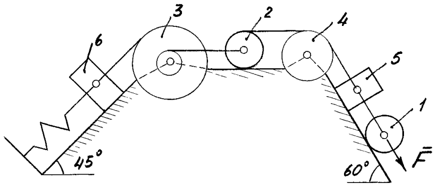


Рис. 6.1

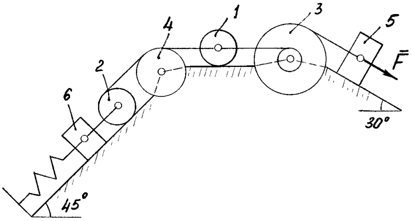


Рис. 6.2

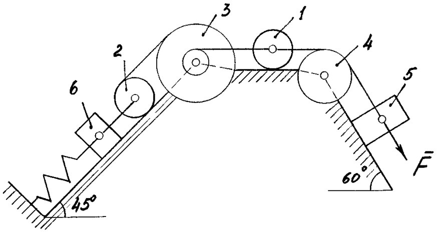


Рис. 6.3

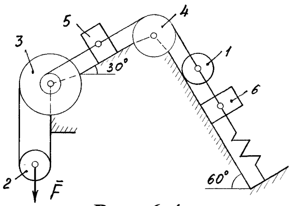


Рис. 6.4

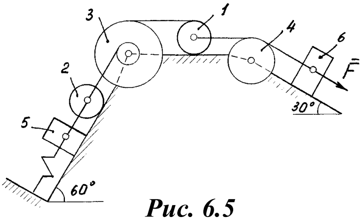


Рис. 6.5

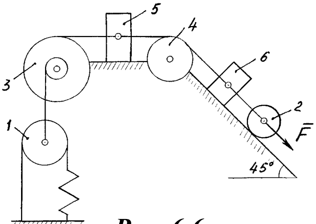


Рис. 6.6

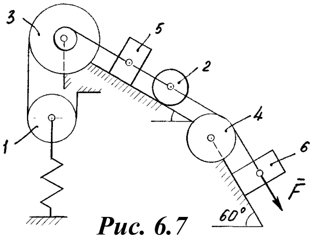


Рис. 6.7

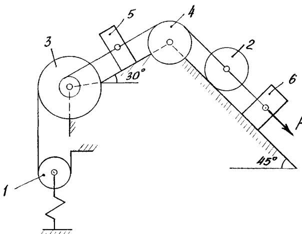


Рис.6.8

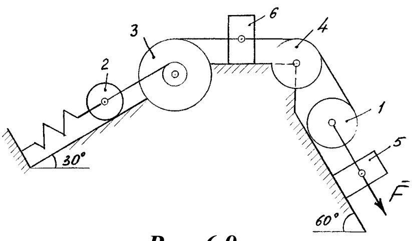


Рис. 6.9

ЗАДАНИЕ 7. Общее уравнение динамики

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3…6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. 7.0…7.9, табл. 10). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары с моментом M, приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны: $R_1 = 0{,}2$ м, $r_1 = 0{,}1$ м, а шкива 2 – $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}15$ м; их радиусы инерции относи-тельно осей вращения равны $\rho_1 = 0{,}1$ м и $\rho_2 = 0{,}2$ м.

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имею-щего больший вес; веса G_1 … G_6 шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1 и 2 изображать всегда, как части системы).

ТАБЛИЦА 10

Номер условия	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	***M,*** *Н·м*
	Н						
0	***10***	***0***	***20***	***30***	***40***	***0***	***0,9***
1	***0***	***40***	***0***	***10***	***20***	***30***	***1,2***
2	***20***	***30***	***40***	***0***	***10***	***0***	***0,6***
3	***0***	***20***	***10***	***30***	***0***	***40***	***1,8***
4	***30***	***0***	***20***	***0***	***40***	***10***	***1,2***
5	***0***	***10***	***30***	***40***	***20***	***0***	***0,9***
6	***40***	***0***	***0***	***20***	***30***	***10***	***1,8***
7	***10***	***20***	***0***	***40***	***0***	***30***	***0,6***
8	***0***	***40***	***10***	***0***	***30***	***20***	***0,9***
9	***30***	***0***	***40***	***20***	***10***	***0***	***1,2***

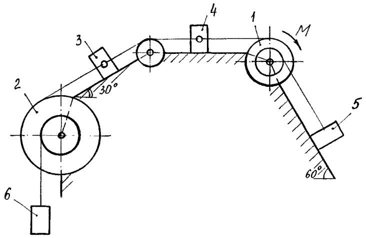


Рис. 7.0

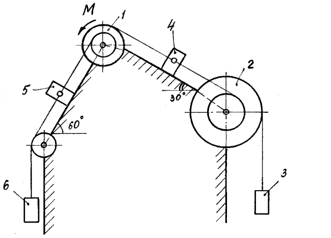


Рис. 7.1

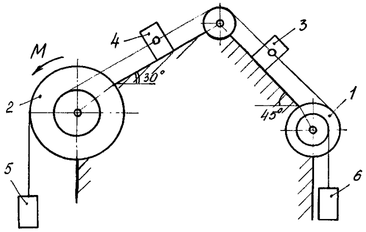


Рис. 7.2

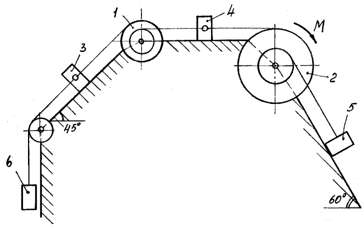


Рис. 7.3

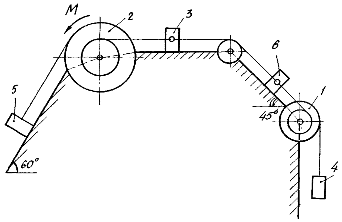


Рис. 7.4

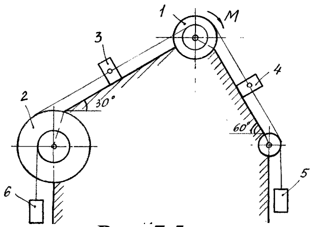


Рис. 7.5

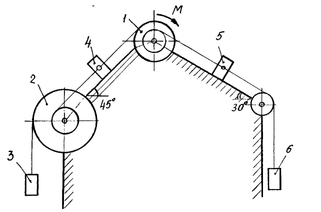


Рис. 7.6

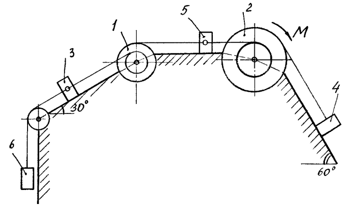


Рис. 7.7

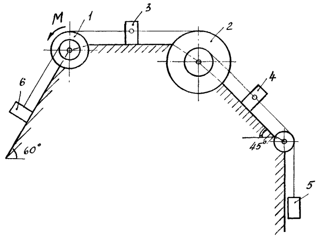


Рис. 7.8

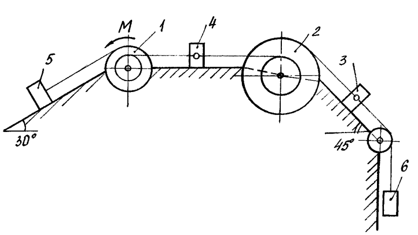


Рис. 7.9